Лекция 5.

Диэлектрическая проницаемость электронного газа. Поляризационный оператор. Экранировка внешнего заряда электронным газом различной плотности. Фриделевские осцилляции. Собственные возбуждения в электронном газе, плазмоны.

Диэлектрическая проницаемость электронного газа –

- величина, наиболее полно описывающая эффект электростатического взаимодействия в системе взаимодействующих электронов, поскольку фактически диэлектрическая проницаемость – реакция системы на внешний заряд.

Уравнения Максвелла для истинного электрического поля и электрической индукции в среде $div\vec{E} = 4\pi e\rho_t$ и $div\vec{D} = 4\pi e\rho_{ext}$ связывают $\vec{E}$ с полным зарядом системы $\rho_t = \rho_{ext} + \rho_{ind}$ (с учетом перестройки собственных зарядов как реакции на появление ρ_{ext} и, как следствие, - возникновение ρ_{ind}), а $\vec{D}$ - с внешним ρ_{ext} .

Поскольку все уравнения – линейны, то можем считать все фигурирующие величины представленными лишь одной Фурье – компонентой.

В результате уравнения принимают вид:

$$\begin{cases} i\left(\vec{q}\vec{E}(\vec{q},\omega)\right) = 4\pi e\rho_t(\vec{q},\omega), \\ i\left(\vec{q}\vec{D}(\vec{q},\omega)\right) = 4\pi e\rho_{ext}(\vec{q},\omega). \end{cases}$$

Отсюда, для продольных(вдоль $\vec{q}$!) составляющих поля и индукции получаем соотношение:

$$\frac{D_{||}(\vec{q},\omega)}{E_{||}(\vec{q},\omega)} = \frac{\rho_{ext}(\vec{q},\omega)}{\rho_t(\vec{q},\omega)}$$

Но с другой стороны связь $D_{||}$ и $E_{||}$ определяет продольную диэлектрическую проницаемость:

$$D_{||}(\vec{q},\omega) = \varepsilon(\vec{q},\omega)E_{||}(\vec{q},\omega) \quad , \quad \text{т.е.} \quad \varepsilon(\vec{q},\omega) = \frac{\rho_{ext}(\vec{q},\omega)}{\rho_{ext}(\vec{q},\omega)+\rho_{ind}(\vec{q},\omega)} \quad ,$$

так что найдя при заданном $\rho_{ext}(\vec{q},\omega)$ отклик системы в виде возникающего $\rho_{ind}(\vec{q},\omega)$, мы получим и $\varepsilon(\vec{q},\omega)$.

Работать технически будем в приближении самосогласованного поля – возмущающий внешний заряд перераспределяет собственные заряды системы, что приводит и к изменению как их взаимодействия между собой, так и с этим внешним зарядом. Каждый отдельный электрон чувствует теперь поле, возникшее как от внешнего заряда, так и от перестроившихся других электронов – в этой “перестройке” уже есть доля и самого рассматриваемого электрона. При этом приближение будет состоять в том, что поле перестроившихся электронов мы будем рассматривать как усредненное по всему объему, т.е. фактически – сглаженное, и тем самым – пренебрегать флуктуациями. Ясно физически, что это приближение будет тем лучше, чем выше плотность электронов(как всегда в статистике флуктуации $\sim\dfrac{1}{\sqrt{N}}(!)$).

Итак, мы будем искать истинную электронную плотность в каждой точке, возникающую в результате действия в системе результирующего потенциал

$$V_t = e\left\{\varphi_t(\vec{q},\omega)e^{i\vec{q}\vec{r}-i\omega t}+\varphi_t^{*}e^{-i\vec{q}\vec{r}-i\omega t}\right\}$$ - величины действительной.

$\Delta\varphi_t(\vec{r},\vec{t}) = -4\pi e\rho_t(\vec{r},t)$, что в Фурье – представлении дает

$$-q^2\varphi_t(\vec{q},\omega) = -4\pi e\rho_t(\vec{q},\omega), \text{ или } \varphi_t(\vec{q},\omega) = \frac{4\pi e}{q^2}\rho_t(\vec{q},\omega).$$

Что касается полной плотности ρ_t, то мы получим ее как среднее значение от оператора плотности:

$$\rho_t = \left\langle \{n\} | \hat{\rho}(\vec{r}) | \{n\} \right\rangle = \left\langle \{n\} | \sum_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha) | \{n\} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \{n\} | \sum_{\substack{\vec{k},\vec{k}' \\ \sigma\,\sigma'}} \hat{a}^+_{\substack{\vec{k}\\ \sigma}} \hat{a}_{\substack{\vec{k}'\\ \sigma'}} \sum_\xi \int d\vec{r}_a \psi^*_{\vec{k}}(\vec{r}_a)\chi^*_\sigma(\xi)\delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha)\psi_{\vec{k}'}(\vec{r}_a)\chi_{\sigma'}(\xi) | \{n\} \right\rangle =$$

$$= \sum_\sigma \sum_{\vec{k},\vec{k}'} \psi^*_{\vec{k}}(\vec{r})\psi_{\vec{k}'}(\vec{r}) \left\langle \{n\} | \hat{a}^+_{\substack{\vec{k}\\ \sigma}} \hat{a}_{\substack{\vec{k}'\\ \sigma'}} | \{n\} \right\rangle = \sum_\sigma \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}} \left|\psi_{\vec{k}}(\vec{r})\right|^2$$

Здесь $\psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ - истинная одночастичная электронная ψ -функция, возникающая в результате самосогласованного воздействия на каждый электрон.

Наша задача – найти $\psi_{\vec{k}}$, возникшую в результате воздействия $\widehat{V}_t$ на первоначально однородное распределение электронов с волновой функцией

$$\psi_{\vec{k}}^{(0)}\left(\vec{r},t\right)=\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}}}{\sqrt{\Omega}}e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_{k}^{(0)}t}$$

Уравнение Шредингера (в нестационарном случае):

$$i\hbar\frac{\partial\psi\left(\vec{r},t\right)}{\partial t}=\widehat{H}\psi\left(\vec{r},t\right),\quad \widehat{H}=\widehat{H}_0+\widehat{V}_t.$$

Ищем $\psi\left(\vec{r},t\right)=\sum_{\vec{k}}C_{\vec{k}}\left(t\right)\psi_{\vec{k}}^{(0)}\left(\vec{r},t\right)$, так что : $i\hbar\frac{\partial C_{\vec{k}'}\left(\vec{r},t\right)}{\partial t}\sum_{\vec{k}'}V_{\vec{k}',\vec{k}_1}\left(t\right)C_{\vec{k}_1}\left(t\right)$, где

$$V_{\vec{k}'\vec{k}_1}=\int d\vec{r}\,\psi_{\vec{k}'}^{*(0)}\left(\vec{r},t\right)V_t\left(\vec{r},t\right)\psi_{\vec{k}_1}\left(\vec{r},t\right)=$$

$$=\int d\vec{r}\,\frac{e^{-i\vec{k}'\vec{r}}}{\sqrt{\Omega}}\cdot e^{\frac{1}{\hbar}\varepsilon_{\vec{k}'}^{(0)}t}\cdot e\left[\varphi_t\left(\vec{q},\omega\right)e^{i\vec{q}\vec{r}-i\omega t}+\varphi_t^{*}\left(\vec{q},\omega\right)e^{-i\vec{q}\vec{r}+i\omega t}\right]\frac{e^{-i\vec{k}_1\vec{r}}}{\sqrt{\Omega}}\cdot e^{-\frac{1}{\hbar}\varepsilon_{\vec{k}_1}^{(0)}t}=$$

$$=e\varphi_t\left(\vec{q},\omega\right)\cdot e^{i\left(\frac{\varepsilon_{\vec{k}'}^{(0)}-\varepsilon_{\vec{k}_1}^{(0)}}{\hbar}\right)t-i\omega t}\cdot\overbrace{\frac{1}{\Omega}\int d\vec{r}e^{i\left(-\vec{k}'+\vec{q}+\vec{k}_1\right)\vec{r}}}^{\delta_{\vec{k}_1,\vec{k}'-\vec{q}}}+e\varphi_t^{*}\left(\vec{q},\omega\right)\cdot e^{i\left(\frac{\varepsilon_{\vec{k}'}^{(0)}-\varepsilon_{\vec{k}_1}^{(0)}}{\hbar}\right)t+i\omega t}\cdot\underbrace{\frac{1}{\Omega}\int d\vec{r}e^{i\left(-\vec{k}'-\vec{q}+\vec{k}_1\right)\vec{r}}}_{\delta_{\vec{k}_1,\vec{k}'+\vec{q}}}$$

Используем далее теорию возмущений, полагая в правой части $C_{\vec{k}_1}(t) \approx C^{(0)}_{\vec{k}_1}(t) = \delta_{\vec{k}_1,\vec{k}}$,

т.е. считаем, что в начальном невозмущенном состоянии электрон находился в определенном состоянии $\vec{k}\,(!)$.

Т.е. $i\hbar \dfrac{\partial C_{\vec{k}'}(t)}{\partial t} \approx V_{\vec{k}',\vec{k}}(t) \cdot 1$, так что,

$$C_{\vec{k}'}(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} V_{\vec{k}',\vec{k}}(t')\,dt' = -\frac{i}{\hbar}\left\{ e\varphi_t(\vec{q},\omega)\cdot\delta_{\vec{k}',\vec{k}'-\vec{q}} \cdot \frac{e^{i\left(\frac{\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}'}-\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}}}{\hbar}\right)t - i\omega t}}{i\left(\frac{\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}'}-\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}}}{\hbar}\right) - i\omega} + \right.$$

$$\left. + e\varphi_t^*(\vec{q},\omega)\cdot\delta_{\vec{k}',\vec{k}'+\vec{q}} \cdot \frac{e^{i\left(\frac{\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}'}-\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}}}{\hbar}\right)t + i\omega t}}{i\left(\frac{\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}'}-\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}}}{\hbar}\right) + i\omega} \right\},$$

где мы предполагаем, что взаимодействие включается адиабатически, т.е.

$\omega \to \omega + i\delta,\ \ \delta \to +0$.

В результате, в первом порядке теории возмущений:

$$\psi_{\vec{k}}\left(\vec{r},t\right)\approx\psi_{\vec{k}}^{(0)}\left(\vec{r},t\right)+\sum_{\vec{k}'\neq\vec{k}}C_{\vec{k}'}\left(t\right)\psi_{\vec{k}'}^{(0)}\left(\vec{r},t\right)=$$

$$=\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}-\frac{1}{\hbar}\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}t}}{\sqrt{\Omega}}+\frac{e\varphi_t\left(\vec{q},\omega\right)}{\hbar\omega+\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}-\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)}}\cdot e^{-i\omega t}\cdot e^{\frac{1}{\hbar}\left(-\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}+\cancel{\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)}}\right)t}\cdot\frac{e^{i\left(\vec{k}+\vec{q}\right)\vec{r}-\cancel{\frac{1}{\hbar}\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)}}t}}{\sqrt{\Omega}}-$$

$$-\frac{e\varphi_t^*\left(\vec{q},\omega\right)}{\hbar\omega-\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}+\varepsilon_{\vec{k}-\vec{q}}^{(0)}}\cdot e^{i\omega t}\cdot e^{\frac{1}{\hbar}\left(-\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}+\cancel{\varepsilon_{\vec{k}-\vec{q}}^{(0)}}\right)t}\cdot\frac{e^{i\left(\vec{k}-\vec{q}\right)\vec{r}-\cancel{\frac{1}{\hbar}\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)}}t}}{\sqrt{\Omega}}=$$

$$=\frac{e^{i\vec{k}\vec{r}-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}t}}{\sqrt{\Omega}}\left\{1+\left(\frac{e\varphi_t\left(\vec{q},\omega\right)e^{i\vec{q}\vec{r}-i\omega t}}{\hbar\omega+\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}-\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)}}-\frac{e\varphi_t^*\left(\vec{q},\omega\right)e^{-i\vec{q}\vec{r}+i\omega t}}{\hbar\omega-\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}+\varepsilon_{\vec{k}-\vec{q}}^{(0)}}\right)\right\}$$

Отсюда результирующая полная электронная плотность:

$$\rho_t = \sum_k n_{\vec{k}} \left|\psi_k(\vec{r},t)\right|^2 = \sum_k n_{\vec{k}} \frac{1}{\Omega}\left|1+(\ldots)\right|^2 \approx$$

$$\approx \sum_{\vec{k}} \frac{n_k}{\Omega}\left\{1+(\ldots)+(\ldots)^*\right\} = \sum_{\vec{k}} \frac{n_k}{\Omega} +$$

$$+\sum_{\vec{k}} \frac{n_k}{\Omega}\left\{e\varphi_t(\vec{q},\omega)e^{i\vec{q}\vec{r}-i\omega t}\left[\frac{1}{\hbar\omega+\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}-\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)}}-\frac{1}{\hbar\omega-\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}-\varepsilon_{\vec{k}-\vec{q}}^{(0)}}\right]+(C.C)\right\}$$

Здесь $\sum_{\vec{k}} \frac{n_k}{\Omega} = \frac{N_e}{\Omega} = n_e^{(0)}$ - исходная невозмущенная равновесная электронная плотность.

Все остальное - ρ_{ind}, так что прямо:

$$\rho_{ind}\left(\vec q,\omega\right)=\frac{e\varphi_t\left(\vec q,\omega\right)}{\Omega}\sum_{\vec k} n_{\vec k}\left(\frac{1}{\hbar\omega+\varepsilon_{\vec k}^{(0)}-\varepsilon_{\vec k+\vec q}^{(0)}}-\frac{1}{\hbar\omega-\varepsilon_{\vec k}^{(0)}-\varepsilon_{\vec k-\vec q}^{(0)}}\right)$$

, или, если во втором члене заменить $\vec k\to\vec k+\vec q$:

$$\rho_{ind}\left(\vec q,\omega\right)=\frac{e\varphi_t\left(\vec q,\omega\right)}{\Omega}\sum_{\vec k}\frac{n_{\vec k}-n_{\vec k+\vec q}}{\hbar\omega+\varepsilon_{\vec k}^{(0)}-\varepsilon_{\vec k+\vec q}^{(0)}}\qquad (!)$$

Так что: $\rho_{ind}\left(\vec q,\omega\right)=\rho_t\left(\vec q,\omega\right)\cdot\dfrac{4\pi e^2}{\Omega q^2}\sum_{\vec k}\dfrac{n_{\vec k}-n_{\vec k+\vec q}}{\hbar\omega+\varepsilon_{\vec k}^{(0)}-\varepsilon_{\vec k+\vec q}^{(0)}+i\delta}$.

Отсюда непосредственно находим:

$$\left(\vec q,\omega\right)=\frac{\rho_{ind}\left(\vec q,\omega\right)}{\rho_t\left(\vec q,\omega\right)}=\frac{\overbrace{\left(\rho_{ext}+\rho_{ind}\right)}^{\rho_t}-\rho_{ind}}{\rho_t}=1-\frac{\rho_{ind}}{\rho_t}=,$$

$$=1-\frac{4\pi e^2}{\Omega q^2}\sum_{\vec k}\frac{n_{\vec k}-n_{\vec k+\vec q}}{\hbar\omega+\varepsilon_{\vec k}^{(0)}-\varepsilon_{\vec k+\vec q}^{(0)}+i\delta}$$

или окончательно: $\boxed{\varepsilon\left(\vec q,\omega\right)=1+\dfrac{4\pi e^2}{\Omega q^2}\sum_{\vec k}\dfrac{n_{\vec k}-n_{\vec k+\vec q}}{\hbar\omega+\varepsilon_{\vec k}^{(0)}-\varepsilon_{\vec k+\vec q}^{(0)}+i\delta}}$

$\varepsilon(\vec{q},\omega)=\varepsilon^{(1)}(\vec{q},\omega)+i\varepsilon^{(2)}(\vec{q},\omega)$ (из-за наличия $i\delta$ в знаменателе (!)), где

$$\varepsilon^{(1)}(\vec{q},\omega)\equiv \mathrm{Re}\,\varepsilon(\vec{q},\omega)=1+\frac{4\pi e^2}{\Omega q^2}\left[\sum_k\left(n_{\vec{k}+\vec{q}}-n_{\vec{k}}\right)P\frac{1}{\hbar\omega+\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}-\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)}}\right],$$ а

$$\varepsilon^{(1)}(\vec{q},\omega)\equiv \mathrm{Im}\,\varepsilon(\vec{q},\omega)=-\pi\frac{4\pi e^2}{\Omega q^2}\sum_{\vec{k}}\left(n_{\vec{k}+\vec{q}}-n_{\vec{k}}\right)\delta\left(\hbar\omega+\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}-\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)}\right),$$ т.е.

распространение волны возмущения $\sim e^{i\vec{q}\vec{r}-i\omega t}$ оказывается в определенном интервале ω и $\vec{q}$ - затухающим $\rightarrow$ для выполнения $\delta(\ldots)=0$ нужно: $\hbar\omega=\varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}}^{(0)}-\varepsilon_{\vec{k}}^{(0)}$, - возмущение переводит электрон из состояния $(\vec{k})$ в состояние $(\vec{q}+\vec{k})$ вблизи поверхности Ферми в полосе шириной 2ω, что и дает поглощение волны, с одной стороны, и возникновение конечного времени жизни у электрона, с другой стороны.

При этом замечательно, что $\rho_t=\dfrac{\rho_{ext}}{\varepsilon}$ $\rightarrow$ внешнее воздействие экранируется за счет перестройки системы, что и определяет коллективные свойства этой системы.

В частности, если $\omega \to \infty$, т.е. внешняя частота столь велика, что у электронов нет состояний, переход между которыми мог бы осуществляться при поглощении такого кванта $\hbar\omega$, то $\operatorname{Im}\varepsilon = 0$, и более того:

$$\operatorname{Re}\varepsilon(\vec{q},\omega) \approx 1 + \frac{4\pi e^2}{\Omega^2 q^2}\left\{\frac{1}{\hbar\omega}\overbrace{\sum_k\left(n_{\vec{k}+\vec{q}} - n_{\vec{k}}\right)}^{\equiv 0} + \frac{1}{(\hbar\omega)^2}\sum_k\left(n_{\vec{k}+\vec{q}} - n_{\vec{k}}\right)\left(\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon^{(0)}_{\vec{k}}\right) + \ldots\right\}$$

$\varepsilon^{(1)}(\vec{q},\omega)\big|_{0\to\omega} \approx 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}$, где ω_p^2 - квадрат некоторой характерной частоты.

Получим эту частоту, полагая ω - большим, а $|\vec{q}|$ - малым(это автоматически даст $\operatorname{Im}\varepsilon \equiv 0$!).

Тогда $$\frac{\omega_p^2}{\left(\dfrac{4\pi e^2}{q^2\Omega}\right)} \cong \frac{1}{\cancel{\hbar^2}}\sum_{\sigma\vec{k}}\left(-\frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial \varepsilon_{\vec{k}}}\right)\cancel{\hbar^2}\left(\vec{v}_k\vec{q}\right)^2 = 2\frac{\Omega}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\delta\left(\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}}\varepsilon_F\right)\left(\vec{v}_k\vec{q}\right)^2$$

Следовательно: $\omega_p^2 = \dfrac{4\pi e^2}{m}\left(\underbrace{2\cdot\dfrac{1}{(2\pi)^3}\cdot\dfrac{4\pi}{3}\cdot k_F^3}_{n_e(!)}\right) = \dfrac{4\pi n_e e^2}{m_e}(!)$ - так называемая плазменная частота электронов.

Можно найти и следующий по $\left(\omega^{-2}\right)$ член (легко проверить, что член $\sim \dfrac{1}{\omega^3}(\ldots) \equiv 0!$ -), именно: $= +\dfrac{1}{(\hbar\omega)^4}\sum_k \underbrace{\left(n_{\vec{k}+\vec{q}} - n_{\vec{k}}\right)}_{\frac{\partial n_k}{\partial \varepsilon_k}\cdot\hbar\left(\vec{v}_k\vec{q}\right)}\underbrace{\left(\varepsilon^{(0)}_{\vec{k}+\vec{q}} - \varepsilon^{(0)}_{\vec{k}}\right)}_{\approx\left(\hbar\left(\vec{v}_k\vec{q}\right)\right)^3} = -\dfrac{1}{\omega^4}\sum_k \delta\left(\varepsilon_{\vec{k}} - \varepsilon_F\right) v_F^4 \cdot q^4 \cdot \cos^4\theta$,

так что будем иметь в интеграле по углам: $2\pi\int\limits_{-1}^{1} \alpha x \cdot x^4 = 2\pi\cdot\dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}\cdot\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$, т.е.

$-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\omega_p^2}{\omega^4}\cdot\left(q\vec{v}_F\right)^2$;

Окончательно: $\varepsilon\left(\vec{q},\omega\right)\Big|_{\substack{\omega\to\infty \\ \vec{q}\ll\vec{k}_F}} \approx 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} - \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\omega_p^2}{\omega^4}\cdot\left(q\vec{v}_F\right)^2 \to 1!$, т.е. столь быстроменяющиеся поля <u>не</u> экранируются.

Отметим далее, что если $\rho_{ext}=0$, то в этом случае: $\rho_t=\rho_{ind}$, или с учетом

$$\left(1-\varepsilon\left(\vec{q},\omega\right)\right)=\frac{\rho_{ind}}{\rho_t},$$

$$\rho_{ind}\cdot\varepsilon=0\rightarrow\begin{cases}1)\rho_{ind}=0-\textit{система не реагирует}\\ 2)\varepsilon\left(\vec{q},\omega\right)=0-\textit{незатухающие собственные частоты}\left(\operatorname{Im}=0\right)\end{cases};$$

$$1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}-\frac{3}{5}\cdot\frac{\omega_p^2}{\omega^4}\left(\vec{q}\vec{v}_F\right)^2+\ldots=0,\text{ или }\omega^2\cong\omega_p^2+\frac{3}{5}\left(\vec{q}\vec{v}_F\right)^2+\ldots.$$

Рассмотрим экранировку точечного заряда, статический случай $\omega=0$.

$$V_{ind}\left(\vec{q}\right)=\frac{4\pi e^2}{q^2\varepsilon\left(\vec{q}\right)}$$

$$V_{ind}\left(\vec{r}\right)=\int d^3\vec{q}\,\frac{4\pi e^2}{q^2\varepsilon\left(\vec{q}\right)}e^{i\vec{q}\vec{r}}$$

При больших $\vec{r}$ вклад в интеграл дают малые $\vec{q}$, тогда можно считать, что

$\varepsilon\left(\vec{q}\right)=1+\dfrac{\lambda_{TF}^2}{q^2}$, и $V_{ind}\left(\vec{r}\right)=\int d^3q\dfrac{4\pi e^2}{q^2+\lambda_{TF}^2}e^{i\vec{q}\vec{r}}\sim\dfrac{e^2}{\vec{r}}e^{-\lambda_{TF}\vec{r}}$, т.е. экспоненциальный спад.

Но ! в $\varepsilon\left(\vec{q}\right)$ есть еще неаналитичность при $\vec{q}=2k_F$

(точнее во второй производной $\varepsilon\left(\vec{q}\right)$).

Поэтому будет аномальный вклад в интеграл $\int d^3\vec{q}\dfrac{4\pi e^2}{q^2\varepsilon\left(\vec{q}\right)}e^{i\vec{q}\vec{r}}$, дважды интегрируя по частям, получим $V\left(r\rightarrow\infty\right)\sim\dfrac{\cos\left(2k_Fr+\eta\right)}{r^3}$ - осциллирующее и гораздо медленнее спадающее поведение. Это называется Фриделевские осцилляции.